

12.16 Caída libre y lanzamiento vertical 2023

Cuando se deja caer un objeto, en el momento en que es liberado, su velocidad inicial es igual a cero, pero instantes después su velocidad va aumentando progresivamente, es decir, hay un aumento en su velocidad y, como consecuencia, aparecerá una aceleración. Esta aceleración es llamada aceleración de gravedad (g) y su valor, en magnitud tiene un aproximado de $9,8 \text{ m/s}^2$.

Este movimiento, como puede notarse, presenta las características de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, hecho que fue demostrado por Galileo Galilei, diciendo que, en ausencia de fricción, todos los cuerpos en el vacío caen hacia la Tierra con la misma aceleración, sin importar su tamaño o peso. Basándose en este hecho puede afirmarse que la aceleración de la gravedad se produce sobre todos los cuerpos que caen libremente y como consecuencia su velocidad aumenta uniformemente y su aceleración es constante.

Si despreciamos los efectos de la resistencia del aire y los pequeños cambios que pueden ocurrir en la aceleración, podemos definir la caída libre de la manera siguiente:

La caída libre es el movimiento, en dirección vertical, con aceleración constante realizado por un cuerpo cuando se deja caer en el vacío.

El término caída libre, es aplicable al movimiento de descenso como de ascenso, lo que para ascender es necesario al cuerpo una velocidad y al descender puede que no tiene esa velocidad, teniendo

Como el cuerpo que cae o que asciende lo hace con aceleración constante, pueden ser aplicadas aquí las mismas ecuaciones del movimiento horizontal con sólo cambiar "a" por "g" y "x" por "y" con las debidas convenciones de signos.

Veamos a continuación la tabla comparativa de las ecuaciones de ambos movimientos.

Movimiento	
Horizontal	Caída Libre
$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$
$v = v_0 + a t$	$v = v_0 + g t$
$v^2 = v_0^2 + 2 a x$	$v^2 = v_0^2 + 2 g y$

Convenciones de signos

a. Se tomará la dirección vertical como el eje "y", considerándose "y" positiva la que va dirigida hacia arriba.

b. Si el cuerpo sube y el sistema de coordenadas tiene el origen en el punto de partida $t = 0$ y $y = 0$ consideramos el sentido hacia arriba positivo, se tendrá que la velocidad y los desplazamientos son positivos, mientras que la aceleración es negativa.

c. Si para el mismo sistema de coordenadas el cuerpo baja y el origen se localiza en el punto de partida $t = 0$ y $y = 0$, se tendrá que las velocidades, los desplazamientos y la aceleración son negativos.

d. Todo valor positivo de "y" indica una posición sobre el origen, y todo valor negativo indica una posición por debajo del origen.

Ejercicios resueltos

Ejercicio 1

Se deja caer libremente un cuerpo. Determine su posición y su velocidad después de 1 s y 3 s. Usar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Solución

Seleccionaremos el origen en el punto del lanzamiento y la dirección sobre el eje "y" hacia abajo como positiva. Las posiciones en cada instante las encontraremos con signo negativo.

Para encontrar la posición del cuerpo usaremos la ecuación:

$$y = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Como parte del reposo por venir en caída libre, se tendrá que $v_0 = 0$, por lo que nos queda que:

Para $t = 1 \text{ s}$

$$y = 0 + \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2) \cdot 1 \text{ s}^2$$

$$y = -5 \text{ m}$$

Para $t = 3 \text{ s}$

$$y = 0 + \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2) \cdot 9 \text{ s}^2$$

$$y = -45 \text{ m}$$

Los signos negativos de "y" significan que son posiciones por debajo del punto considerado como origen.

Para determinar la rapidez en cada punto usaremos la ecuación:

$$v = v_0 + g t$$

Como el cuerpo parte del reposo se tiene que la velocidad inicial $v_0 = 0$ quedándonos que:

Para $t = 1 \text{ s}$

$$v = 0 + (-10 \text{ m/s}^2) \cdot 1 \text{ s}$$

$$v = -10 \text{ m/s}$$

Para $t = 3 \text{ s}$

$$v = 0 + (-10 \text{ m/s}^2) \cdot 3 \text{ s}$$

$$v = -30 \text{ m/s}$$

Obsérvese que las dos velocidades son negativas. Esto significa que el cuerpo desciende a partir del origen con esa velocidad.

Ejercicio 2

Desde el suelo se lanza verticalmente hacia arriba un cuerpo con velocidad de $24,4 \text{ m/s}$. Calcular:

a) Tiempo en alcanzar la altura máxima.

b) La altura máxima alcanzada.

c) El tiempo transcurrido cuando esté 29m por encima del suelo.

$$\text{Usar } g = 10 \text{ m/s}^2.$$

Solución

a) Seleccionaremos el punto del lanzamiento como el origen y la dirección sobre el eje "y" hacia arriba como positivo.

$$v = v_0 + g t$$

Sustituyendo por sus valores v , v_0 y $g = 10 \text{ m/s}^2$ se tiene que:

$$0 = 24,4 \text{ m/s} + (-10 \text{ m/s}^2) \cdot t$$

$$0 = 24,4 \text{ m/s} - 10 \text{ m/s}^2 \cdot t$$

Transponiendo términos se tiene:

$$10 \text{ m/s}^2 \cdot t = 24,4 \text{ m/s}$$



Figura 2.40

R: a) 40 m/s; b) 2,2 s.

- 16) Una piedra se deja caer libremente a fondo de un precipicio de 80 m de altura. Un segundo más tarde una segunda piedra se lanza hacia abajo, de tal forma que alcanza a la segunda justamente cuando ésta llega al fondo. Calcular:

- La velocidad con que se lanzó la segunda piedra.
- La velocidad que llevaba la primera cuando fue alcanzada.
- El tiempo que dura en el aire la segunda. Usar $g = -10 \text{ m/s}^2$.

R: a) 11,6 m/s; b) 40 m/s; c) 3 s.

- 17) Un objeto es lanzado verticalmente hacia arriba. Cuando alcanza la mitad de la altura máxima su velocidad es de 24 m/s.

- ¿Cuál es la altura máxima?
- ¿Qué tiempo tarda en alcanzar una velocidad de 24 m/s hacia abajo?

R: a) 57,6 m; b) 3,39 s; c) 33,9 m/s; d) 5,79 s.

- 18) Por una llave de la ducha cae una gota de agua cada segundo. En el primer instante en el que va a caer la cuarta gota.

- ¿Qué distancia separa la primera de la segunda gota?
- ¿Qué velocidad posee la tercera gota?

R: a) 25 m; b) 10 m/s.

- 19) Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba desde el suelo. Un estu-

diente, que se encuentra en una verja, ve que la pelota pasa frente a la ventana de 5,4 m/s hacia arriba. La ventana se encuentra a 12 m de altura.

- ¿Qué altura máxima alcanza la pelota?
- ¿Cuánto tarda la pelota en llegar a la altura máxima desde que la estudiante frente a él?

R: a) 13,45 m; b) 0,5 s.

- 20) Desde la parte superior de un edificio se deja caer un cuerpo, que en su movimiento vertical tarda 0,3 s en pasar por el frente de una ventana de 3 m de altura. ¿Cuál es la distancia medida entre la azotea y la parte superior de la ventana? Usar $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

R: -3,17 m

- 21) Desde lo alto de un edificio se deja caer una piedra. A los 0,5 s después se lanza hacia abajo otra piedra con una rapidez de 10 m/s. ¿Dónde alcanzará la segunda piedra a la primera? Usar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

R: 2,81 m

- 22) Se lanza, verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad de 8 m/s. Determinar el tiempo que tarda el proyectil en estar ubicado a 2,4 m sobre el punto de partida.

R: 0,2 s y 0,4 s

Preguntas

- ¿Puede un cuerpo tener rapidez sin aceleración? Explique.
- ¿Puede tener aceleración un cuerpo con rapidez cero? Explique.
- ¿Puede un cuerpo tener rapidez constante y estar acelerándose? Explique.
- ¿Puede un cuerpo tener velocidad cero y estar acelerándose? Explique.

- Un cuerpo tiene una velocidad dirigida hacia el este. ¿Podrá tener una aceleración hacia el oeste?
- ¿Puede cambiar la dirección de la velocidad de un cuerpo cuando la aceleración es constante?
- ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son falsas y cuáles son verdaderas? Explique.

- La rapidez de un cuerpo aumenta a medida que su aceleración disminuye.
- Cuando la velocidad es constante la velocidad promedio difiere de la velocidad instantánea.
- Un cuerpo que tiene una velocidad hacia el este tiene una aceleración también hacia el este.
- Un cuerpo que tiene una velocidad cero, tiene una aceleración diferente de cero.
- Un objeto puede tener velocidad constante aun cuando su rapidez varíe.
- ¿En qué se diferencian el movimiento rectilíneo uniforme del movimiento rectilíneo uniformemente variado?
- ¿En todo movimiento uniformemente retardado el tiempo es máximo? Explica tu respuesta.
- ¿Qué condición debe verificarse para que el desplazamiento en un M.U.R. sea máximo?
- ¿Qué diferencia puedes establecer entre los sistemas de referencia inercial y no inercial?

2.17 Movimiento en el plano con velocidad constante

Un ejemplo de un movimiento en un plano con velocidad constante, lo tenemos en el siguiente caso: un nadador que se lanza perpendicularmente a la dirección de corriente, tratando de atravesar un

rio para llegar a la orilla opuesta. Aquí no se debe perder de vista que la corriente del agua también posee su propia velocidad. ¿Cuál será la velocidad del nadador con respecto a la Tierra?

Analicemos el caso del nadador a través de la figura 2.41.

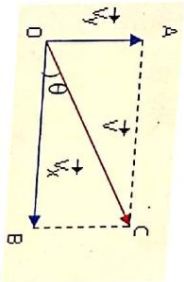


Figura 2.41

Si nada en aguas tranquilas, con velocidad v_n , es lógico que después de transcurrido un tiempo "t" habrá alcanzado la orilla opuesta, llegando a la posición A, siguiendo la dirección dada por el vector OA.

Si la velocidad del nadador es nula, y sólo queda sometido a la acción de la velocidad de la corriente v_r , entonces será llevado por ésta, la cual lo habrá arrastrado hasta la posición B, siguiendo la dirección y el sentido del vector OB.

Si el nadador queda sometido a la acción simultánea de las dos velocidades, cada uno de los movimientos se cumplirá, independientemente y, como resultado de la suma vectorial de ellos, el nadador arribará realmente a la posición C, luego la velocidad resultante con que se desplace respecto a la orilla vendrá dada por el vector OC, que es el vector v resultante de las velocidades componentes v_n y v_r .

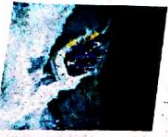
La velocidad del nadador respecto a la Tierra (v), se obtiene a través de la suma vectorial: $v = v_n + v_r$

- c) El desplazamiento total.
d) La dirección del desplazamiento.
R: a) 2,34 m/s; b) 53,3°; c) 124,9 m; d) 39° 48' 20"

- 6) Un bote atraviesa un río de 50 m de ancho en dirección perpendicular a la corriente. Si la velocidad del bote con respecto al agua es de 4 m/s y se mueve 20 m aguas abajo. Calcular:
a) La velocidad de la corriente con respecto a Tierra.
b) La velocidad del bote con respecto a Tierra.
c) La dirección del desplazamiento.
R: a) 1,6 m/s; b) 4,3 m/s; c) 38° 11' 55"

- 7) Un río corre hacia el este con velocidad de 3 m/s. Una persona lo atraviesa en una barca con una velocidad con respecto al agua de 4 m/s hacia el norte.
a) ¿Cuál es su velocidad con respecto a Tierra?
b) Si el río tiene 1 m de ancho, ¿cuánto tiempo empleará en cruzar el río?
R: a) 5 m/s; b) 0,25 s.

- 8) Una lancha trata de atravesar un río perpendicularmente a la dirección de la corriente. Si la velocidad del río con respecto a la Tierra es de 4 m/s y la dirección del desplazamiento al atravesar el río es 32° 20' 57".
a) ¿Cuál es la velocidad de la lancha con respecto al agua?
b) Si el río tiene un ancho de 120 m, ¿cuál es el desplazamiento horizontal de la lancha en ese tiempo?
c) ¿Cuál es el desplazamiento total?
R: a) 2,53 m/s; b) 47,4 s; c) 189,6 m; d) 224,38 m.



- 9) Una lancha se desliza con rumbo suroeste de la orilla de un lago. La dirección de esta orilla es de 15° al oeste del norte. Después de transcurrir 900 s la lancha se encuentra a 1,25 km de la orilla. ¿Cuál es la velocidad de la lancha?
R: 1,6 m/s

2.18 Movimiento de proyectiles

Un proyectil es cualquier objeto al cual se le ha comunicado una velocidad inicial por algún agente y cuyo movimiento continúa únicamente bajo la acción de la atracción gravitatoria. A la ciencia encargada de hacer el estudio del movimiento de los proyectiles se le denomina balística.

Para tener una idea de este tipo de movimiento veamos algunos ejemplos que lo ponen de manifiesto:

- Cuando un jugador de béisbol lanza una pelota a otro jugador.



- Cuando un bateador hace "swing" a un lanzamiento y eleva la pelota.



- Cuando un futbolista le da un puntapié al balón.



- Cuando un avión deja caer un paquete.



Todos estos movimientos serán analizados de manera sencilla, sin considerar algunos factores que inciden en ellos, tales como la resistencia del aire, la rotación de la Tierra.

Consideremos una pelota colocada en el centro de una mesa (figura 2.43). Si la hacemos rodar, proporcionándole un golpeo con el dedo, ella se desplazará a lo largo de la mesa con movimiento rectilíneo uniforme (siempre y cuando no se considere el roce). Este movimiento debería continuar en forma rectilínea ocupando las posiciones A, B y C, pero no ocurre así, sino que ocupa las posiciones H, I, J debido a los efectos de atracción de la Tierra.

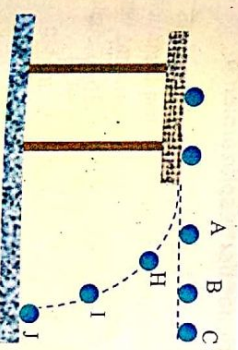


Figura 2.43

Como puede notarse, la pelota está sometida simultáneamente a la acción de dos movimientos:

- a) Un movimiento horizontal rectilíneo y uniforme, con velocidad constante, donde no hay aceleración en esa dirección ($a_x = 0$). Este movimiento está regido solamente por la inercia.
- b) Un movimiento vertical, que es uniformemente acelerado, con una aceleración igual a la aceleración de la gravedad, es decir donde $a_y = -g$.

Estos dos movimientos, simultáneos, hacen que el movimiento resultante sea de trayectoria parabólica. Dichos movimientos son completamente independientes uno del otro, tal y como lo demostró Galileo Galilei mediante experimentos que lo condujeron a enunciar su principio denominado principio de Independencia de los movimientos, el cual se enuncia así:

"Si un cuerpo tiene un movimiento compuesto, cada uno de los movimientos componentes se cumple como si los demás no existieran".

En general puede decirse que:

- El movimiento horizontal está regido por la ley de inercia.
- El movimiento vertical está regido por la fuerza de gravedad.

Movimiento de un cuerpo lanzado horizontalmente

Analicemos el siguiente caso, desde una altura "y" se dispara un proyectil, como lo indica la figura 2.44, con una velocidad inicial que llamaremos V_0 . Usaremos como referencia un sistema cartesiano cuyo origen está en el punto de lanzamiento (A) y cuyo eje "x" es la dirección del lanzamiento. El eje "y" es la vertical con sentido negativo hacia abajo.

El cuerpo, al iniciar su caída, es sometido a la acción de dos movimientos independientes: uno horizontal con velocidad constante y otro vertical uniformemente acelerado hacia abajo, tal como un objeto que cae libremente partiendo del reposo.

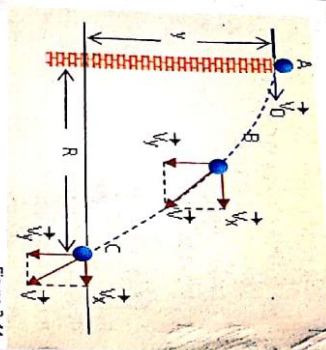


Figura 2.44

En el primer movimiento, al no actuar ninguna fuerza horizontal para cambiar la velocidad, se origina una aceleración cero y como consecuencia una velocidad horizontal constante. En el segundo movimiento, la fuerza de gravedad hacia abajo hace que la velocidad vertical cambie uniformemente.

Las flechas horizontales, que indican la velocidad horizontal, son todas de la misma longitud, lo que nos indica que la velocidad horizontal es constante, en cambio las flechas verticales varían cada vez de longitud, indicándonos que la velocidad vertical aumenta con el tiempo.

La velocidad resultante v del proyectil ABC (figura 2.44) y está cambiando constantemente de módulo y dirección.

Ecuaciones de la velocidad

- La componente horizontal de la velocidad, la cual llamaremos v_x , será la magnitud constante a través de todo el recorrido e igual a v_0 . Esto se debe a

como lo hemos dicho antes, es que la velocidad constante.

$$v_0 = v_x$$

- La componente vertical de la velocidad, la cual llamaremos v_y , en un instante de tiempo cualesquiera viene dado en módulo por:

$$v_y = g \cdot t$$

- La magnitud de la velocidad resultante v , viene dada en módulo por la expresión:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

- La dirección de la velocidad, queda determinada por la tangente del ángulo α (Figura 2.45).

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

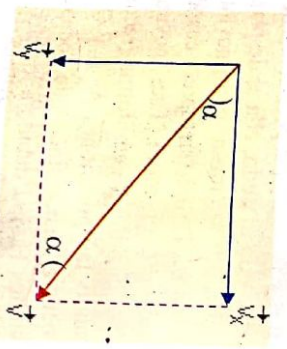


Figura 2.45

Ecuaciones del desplazamiento

Como se puede notar, el movimiento tiene simultáneamente un desplazamiento horizontal " x " y un desplazamiento vertical " y " en un instante de tiempo cualquiera. Observemos la figura 2.46.

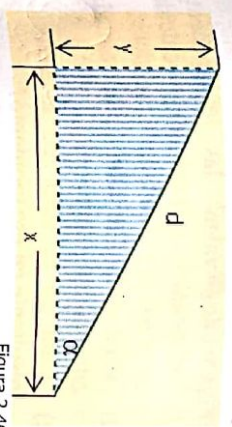


Figura 2.46

- x : desplazamiento horizontal
- y : desplazamiento vertical
- d : desplazamiento total
- α : dirección del desplazamiento.

- Ecuación del desplazamiento horizontal (x)

En módulo, la ecuación del desplazamiento horizontal es la misma del movimiento rectilíneo uniforme, puesto que la rapidez en ese sentido es constante, escribiéndose que:

$$x = v_0 \cdot t$$

- Ecuación del desplazamiento vertical (y)

El desplazamiento vertical se calcula como si el cuerpo se moviese en caída libre, escribiéndose que:

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t^2$$

El signo negativo se debe a la gravedad, que como se ha dicho es un vector dirigido verticalmente hacia abajo.

- Magnitud del desplazamiento total (d)

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

- Dirección del desplazamiento

Esta se obtiene aplicando la definición de tangente en el triángulo rayado de la figura 2.46.

$$\tan \alpha = \frac{y}{x}$$

- Ecuación del tiempo de vuelo (t_v)

El tiempo de vuelo es el tiempo transcurrido desde el momento del lanzamiento hasta tocar el suelo.

Al tocar el suelo es porque ha recorrido todo el desplazamiento vertical (y), pudiéndose escribir que:

$$y = -\frac{1}{2} g \cdot t_v^2, \text{ de donde,}$$

$$t_v^2 = -\frac{2y}{g}$$

$$t_v = \sqrt{-\frac{2y}{g}}$$

La cantidad subradical será siempre positiva, puesto que (y) es negativa de acuerdo a la elección hecha al comienzo, donde se dijo que el eje " y " es negativo hacia abajo.

- Ecuación del alcance horizontal (R)

El alcance horizontal es el desplazamiento horizontal en el tiempo de vuelo y aparece indicado en la figura 2.46.

La ecuación para calcular el alcance horizontal (R) es la misma del desplazamiento horizontal, pero con $t = t_v$.

$$R = v_x \cdot t_v$$

Ecuación de la trayectoria

Nuestra idea consiste en demostrar que la trayectoria del proyectil es parabólica. En efecto, el desplazamiento horizontal para un cierto tiempo " t " viene dado por:

$$x = v_0 \cdot t, \text{ de donde:}$$

$$t = \frac{x}{v_0} \dots \dots \dots (1)$$

Unidad II

Por otra parte, el desplazamiento "r" es:

$$y = \frac{1}{2} g \cdot t^2 \quad (2)$$

Como el tiempo para ambos desplazamientos es el mismo, podemos sustituir "t" de la ecuación (1), en "t" de la ecuación (2), quedándonos:

$$y = \frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0} \right)^2$$

$$y = \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2}$$

$$y = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2} \right) x^2$$

Como v_0 y g son constantes y $\frac{1}{2} \cdot \frac{g}{v_0^2}$ es una constante, podemos

sustituir lo que está entre paréntesis por k , adoptando la expresión la forma siguiente:

$$y = k \cdot x^2$$

Como puede notarse, esta expresión corresponde a la ecuación de la parábola.

Ejercicio resuelto

Ejercicio 1

Una esfera es lanzada horizontalmente desde el borde de una mesa con una velocidad de 24,40 m/s, llegando al suelo 2,5 s después.

a) ¿Cuánto ha descendido en ese tiempo?

b) ¿Cuánto ha avanzado en sentido horizontal?

c) ¿Cuánto valen las componentes horizontal y vertical de la velocidad en el momento de tocar el suelo?

d) ¿Cuál es la dirección de la velocidad en el instante anterior?

e) ¿Cuál es el valor de la velocidad resultante en ese momento?

Solución

Según los datos del problema, se dibuja un diagrama (figura 2.47) indicándose las condiciones del problema.

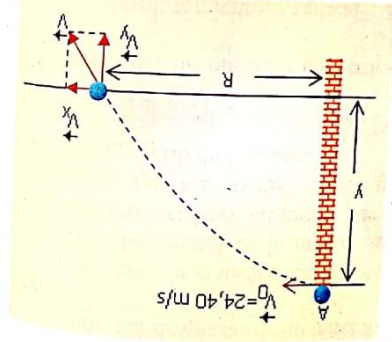


Figura 2.47

Como nos dan el tiempo al llegar al suelo, éste no es más que el tiempo de vuelo, de donde $t_v = 2,5$ s. La velocidad inicial $v_0 = 24,40$ m/s.

a) Como nos piden el descenso vertical en el tiempo de vuelo, calculamos "y" mediante la ecuación:

$$y = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t_v^2$$

Sustituyendo por $g = -10 \text{ m/s}^2$ y $t_v = 2,5$ s, tenemos que:

$$y = \frac{1}{2} (-10 \text{ m/s}^2) \cdot (2,5 \text{ s})^2$$

$$y = -5 \text{ m/s}^2 \cdot 6,25 \text{ s}^2$$

$$y = -31,25 \text{ m}$$

Unidad II

El signo negativo significa que hubo un descenso. Debido a que el descenso ha sido en el tiempo de vuelo, concluimos que se ha calculado la altura desde donde fue lanzada la esfera.

b) Este avance horizontal no es más que el alcance horizontal, ya que nos están dando el tiempo de vuelo.

$$R = v_x \cdot t_v$$

$$R = 24,40 \text{ m/s} \cdot 2,5 \text{ s}$$

$$R = 61 \text{ m}$$

c) Las componentes (v_x) (v_y) de la velocidad, vienen dadas así:

Componente horizontal

Recordemos que el movimiento horizontal es a velocidad constante, por lo que podemos decir:

$$v_x = v_0 = 24,40 \text{ m/s}$$

Componente vertical

$$v_y = g t$$

$$v_y = -10 \text{ m/s}^2 \cdot 2,5 \text{ s}$$

$$v_y = -25 \text{ m/s}$$

Aquí el signo negativo significa que la componente vertical de la velocidad está dirigida hacia abajo.

d) Calculamos la dirección de la velocidad y observamos la figura 2.48, de la cual se obtiene que:

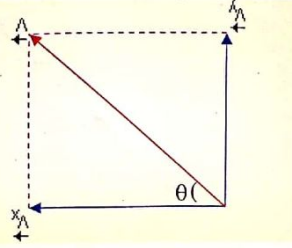


Figura 2.48

$$\text{tag} \theta = \frac{v_y}{v_x}$$

$$\text{tag} \theta = \frac{-25 \text{ m/s}}{24,40 \text{ m/s}}$$

tag $\theta = 1,024590164$ de donde:

$$\theta = 45^\circ 41' 45''$$

e) El módulo de la velocidad viene dado por:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2$$

$$v^2 = (24,40 \text{ m/s})^2 + (25 \text{ m/s})^2$$

Efectuando operaciones y extra-

yendo raíz cuadrada nos queda:

$$v = 34,93 \text{ m/s}$$

Lanzamiento inclinado

En este análisis también se ignora el efecto que produce la resistencia del aire sobre estos movimientos.

Consideremos un proyectil lanzado desde la superficie terrestre con una velocidad inicial, formando un ángulo con la horizontal. Figura 2.49.



Unidad II

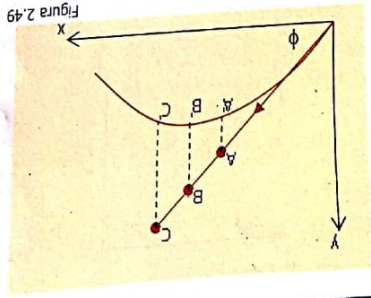


Figura 2.49

Si la Tierra no ejerciera atracción, el proyectil ocuparía las posiciones A, B, C; pero debido al efecto de la gravedad éste ocupa las posiciones A', B', C' describiendo una trayectoria parabólica. En este caso el movimiento del proyectil se puede considerar como el movimiento resultante de estos dos movimientos:

- Uno horizontal con velocidad constante, es decir, la componente horizontal de la aceleración es cero ($a_x = 0$).
- Otro vertical con aceleración constante g , dirigida hacia abajo, $a_y = -g$.

Ecuaciones de la velocidad en el momento del lanzamiento (para $t = 0$)

Tomemos como referencia un sistema cartesiano cuyo origen es el punto de lanzamiento, donde el eje "x" es el horizontal y el eje "y" el vertical.

Supongase que se dispara un proyectil con una velocidad inicial que llamaremos v_0 , formando con la horizontal un ángulo θ (Ver figura 2.50).

Ecuaciones de la velocidad para un instante de tiempo después del lanzamiento ($t \neq 0$).

Como puede observarse, lo que se ha hecho es descomponer el vector velocidad inicial v_0 en sus componentes en las direcciones de los ejes "x" e "y".

$$v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

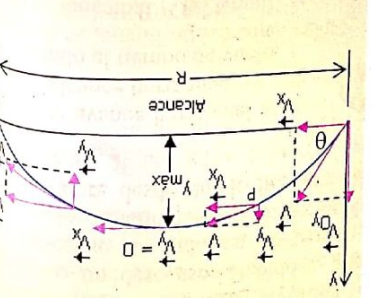
$$v_{0y} = v_0 \sin \theta$$

- Componente horizontal de la velocidad inicial:
- Componente vertical de la velocidad inicial:

viene dadas en módulo así:

Las ecuaciones de las componentes del vector velocidad inicial v_0 en las direcciones de los ejes x y y en el instante $t = 0$.

Figura 2.50



El Movimiento

Unidad II

- La magnitud de la componente horizontal de la velocidad en un instante cualquiera se mantiene constante a través de todo el recorrido y viene dada por la expresión:

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos \theta$$

- La magnitud de la componente vertical de la velocidad en cualquier instante viene dada por la expresión:

$$v_y = v_{0y} + gt$$

- La magnitud de la velocidad en cualquier instante viene dada por:

$$v = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

- La dirección de la velocidad es el ángulo que dicho vector forma con el eje horizontal. En este caso es α y viene dado por:

$$\tan \alpha = \frac{v_y}{v_x}$$

Ecuaciones del desplazamiento

- Desplazamiento horizontal, el movimiento horizontal lo realiza el proyectil con velocidad constante, por lo que el desplazamiento horizontal "x" viene dado por la ecuación:

$$x = v_x \cdot t$$

$$x = v_0 \cos \theta \cdot t$$

- Desplazamiento vertical, el movimiento vertical lo realiza el proyectil con aceleración constante g dirigida hacia abajo, por lo que la ecuación del desplazamiento vertical vendrá dada por:

$$y = v_{0y} \cdot t + \frac{1}{2} gt^2$$

Como $v_{0y} = v_0 \sin \theta$, puede escribirse que:

$$y = v_0 \sin \theta \cdot t + \frac{1}{2} gt^2$$

- Desplazamiento en cualquier instante. Tomando en cuenta los desplazamientos horizontal y vertical se tiene para un instante cualquiera que:

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ecuación del tiempo máximo (t_{max})

Se llama tiempo máximo al tiempo empleado por el proyectil en alcanzar la altura máxima (y_{max}) lo cual logra al llegar a la posición Q de la figura 2.51.

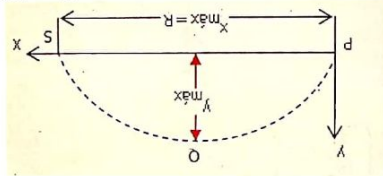


Figura 2.51

Como puede notarse, a medida que el proyectil asciende va disminuyendo la componente vertical de la velocidad hasta llegar un momento en que la misma se hace cero. (Ver figura 2.51)

Para ello hacemos $v_y = 0$ en la ecuación:

$$v_y = v_{0y} + gt$$

$$0 = v_{0y} + gt_{max}$$

Despejando t_{max} se tiene que:

$$t_{max} = -\frac{v_{0y}}{g}$$

Recuerde que g siempre es negativa por lo que t_{max} ha de ser positiva.

El Movimiento

Unidad II

Ecuación de la altura máxima ($y_{\max}$)

Se llama altura máxima, al punto en que el proyectil no puede subir más, de modo que la velocidad según el eje "y" es nula.

Si hacemos $t = t_{\max}$ en la ecuación

$$y = v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

Esto nos permite obtener la altura máxima quedándonos que:

$$y_{\max} = v_{oy} \cdot t_{\max} + \frac{1}{2} g (t_{\max})^2$$

Como $t_{\max} = -\frac{v_{oy}}{g}$, nos queda:

$$y_{\max} = v_{oy} \left(-\frac{v_{oy}}{g} \right) + \frac{1}{2} g \left(-\frac{v_{oy}}{g} \right)^2$$

$$y_{\max} = -\frac{v_{oy}^2}{2g} + \frac{1}{2} g \cdot \frac{v_{oy}^2}{g^2}$$

$$y_{\max} = -\frac{2v_{oy}^2 + v_{oy}^2}{2g}$$

$$y_{\max} = -\frac{v_{oy}^2}{2g}$$

Ecuación del tiempo de vuelo

Se llama tiempo de vuelo al tiempo transcurrido en ir desde P hasta S pasando por Q (figura 2.51). El tiempo de vuelo (t_v) es igual al doble del tiempo máximo.

$$t_v = 2 \cdot t_{\max}$$

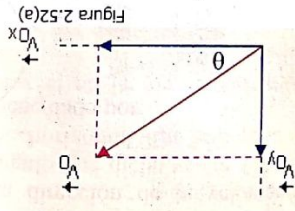
El alcance horizontal (R), el cual es llamado también desplazamiento horizontal ($x_{\max}$), es el desplazamiento horizontal en el tiempo de vuelo.

Algunas estrategias para la resolución de problemas de lanzamientos inclinados

1) Se descompone la velocidad inicial v_0 en sus componentes en las direcciones de los ejes "x" e "y", calculándose sus módulos. Ver figura 2.52 (a).

$$v_{ox} = v_0 \cos \theta$$

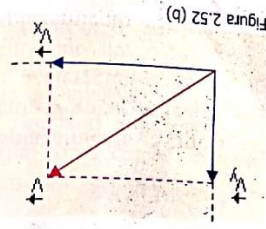
$$v_{oy} = v_0 \sin \theta$$



2) Se descompone la velocidad v del proyectil en cualquier instante de tiempo de su trayectoria y se calculan la componente horizontal y la componente vertical. Ver figura 2.52(b)

$$v_x = v_{ox} = v_0 \cos \theta$$

$$v_y = v_{oy} - g t = v_0 \sin \theta - g t$$



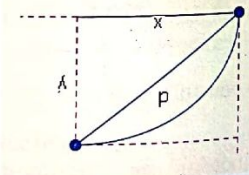
3) Se calculan las posiciones ocupadas por el proyectil en cualquier instante t. Ver figura 2.52(c).

$$x = v_x \cdot t = v_0 \cos \theta \cdot t$$

$$y = v_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} g t^2 = v_0 \sin \theta \cdot t + \frac{1}{2} g t^2$$

4) Se calcula el desplazamiento "d" o la posición en cualquier instante "t".

$$d = \sqrt{x^2 + y^2}$$



5) Se calculan la altura máxima alcanzada ($y_{\max}$), el tiempo máximo ($t_{\max}$), el tiempo de vuelo (t_v) y el alcance horizontal (R).

$$y_{\max} = -\frac{v_{oy}^2}{2g}$$

$$t_v = 2 \cdot t_{\max}$$

$$R = v_{ox} \cdot t_v$$

$$t_{\max} = -\frac{v_{oy}}{g}$$

6) Es necesario asegurarse de utilizar los signos correctos y las unidades convenientes. Recordemos que $a_y = -g$

El Movimiento

Ejercicios resueltos

Se lanza un proyectil con una velocidad de 61 m/s y un ángulo de 60° sobre la horizontal. Calcular:

a) ¿Cuánto vale la componente vertical de la velocidad inicial?

b) ¿Cuánto vale la componente horizontal de la velocidad inicial?

c) ¿Cuál es la velocidad vertical al cabo de 2 s?

d) ¿Cuánto vale la velocidad horizontal al cabo de 2 s?

e) ¿Cuál es la magnitud de la velocidad al cabo de 2 s?

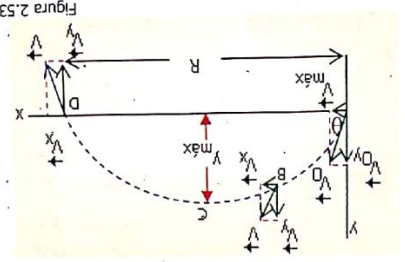
f) ¿En qué instante el proyectil alcanza el punto más alto de su trayectoria?

g) ¿Cuál es el alcance del proyectil?

h) ¿Cuál es la velocidad del proyectil al llegar al suelo?

Solución

Para resolverlo, debemos hacer un dibujo de un movimiento parabólico que nos permita tener idea del problema.



a) La componente vertical de la velocidad inicial es:

$$v_{oy} = v_0 \sin \theta$$

$$v_{oy} = 61 \text{ m/s} \cdot \sin 60^\circ$$

$$v_{oy} = 52.82 \text{ m/s}$$

Unidad II

Segunda parte
Verdadero y Falso

A continuación se presentan las siguientes proposiciones, unas son verdaderas y otras son falsas. Analiza cada una de las proposiciones y justifica la respuesta.

17) En el movimiento semiparabólico el tiempo de caída libre del proyectil depende de la altura del lanzamiento.

18) En el punto más alto de la trayectoria de un proyectil, la aceleración es cero.

19) Cuando un cuerpo está sometido a la acción de varios movimientos, cada uno de ellos se cumple independiente porque cada uno actúa a diferentes intervalos de tiempo.

20) El tiempo necesario para que un proyectil disparado horizontalmente alcance el suelo, es diferente si se dejase caer desde el reposo y desde la misma altura.

21) Dos cuerpos de pesos diferentes caen en un mismo lugar con diferente aceleración.

22) En el movimiento de un proyectil que se lanza horizontalmente, aumenta su velocidad horizontal.

23) El alcance horizontal de un proyectil lanzado con ángulo de elevación es independiente del ángulo.

24) El alcance es independiente del valor de la gravedad.

25) El tiempo de vuelo varía con el ángulo de inclinación.

26) La altura máxima se duplica cuando se duplica la velocidad inicial.

Tercera parte
Problemas

Resuelve los siguientes problemas

27) Un bateador golpea una pelota con un ángulo de 35° y es recogida 6 s más tarde cuando $x = 120$ m. ¿Qué velocidad le proporcionó el bateador a la pelota?

28) Un bombardero vuela a una altura de 1.200 m con una velocidad horizontal de 420 km/h. Desde el fin de explotar una bomba con el fin de explotar un objetivo que está sobre la superficie de la Tierra. ¿Cuántos metros, antes de llegar al punto, exactamente encima del objetivo, debe ser liberada la bomba para dar en el blanco?

30) Un objeto A se deja caer libremente desde una altura de 80 m. Un segundo objeto B, de tal forma que alcanza al objeto A justamente cuando éste llega al suelo. Determinar:

a) ¿Con qué rapidez se lanzó B?

b) ¿Qué rapidez llevaba el objeto A cuando fue alcanzado?

c) ¿Cuánto tiempo dura en el aire el objeto B?

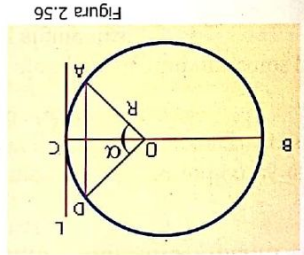
R: a) 11,42 m/s; b) 39,592 m/s; c) 3,04 s.

2.19 Estudio del movimiento circular

Antes de estudiar el movimiento circular y el movimiento circular uniforme, tratemos de recordar algunos conceptos previos que nos ayudarán a comprender mejor las ideas.

Una **circunferencia**, es el conjunto de puntos del plano equidistantes de un punto llamado centro, el cual notaremos como "O", tal como lo muestra la figura 2.56.

Una **circunferencia** posee los siguientes elementos:



Radio es el segmento de recta que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella. En la figura 2.56 los segmentos OA, OD, OC y OB son radios de la circunferencia.

Diámetro es el segmento de recta que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro de ella. En la figura 2.56, BC es el diámetro, observándose que el diámetro es dos veces la longitud del radio.

Arco es la porción de la circunferencia determinada por dos puntos. El arco se denota con las letras asignadas a los puntos, colocando sobre ellas un arco así:

Cuando da una vuelta completa, la longitud del arco coincide con la longitud de la circunferencia, pudiéndose escribir que:

$$L = 2\pi R$$

Tangente es la recta que tiene un punto en común y sólo uno con la circunferencia. La recta L es una tangente a la circunferencia en el punto C de la figura 2.56.

Ángulo central es todo ángulo que tiene su vértice en el centro de la circunferencia. El ángulo α es un ángulo central en la figura 2.56.

Radio vector es el segmento de recta dirigido desde el centro de la circunferencia a cualquier punto de ella. En la figura 2.56, R es un radio vector.

Cuerda es el segmento que une dos puntos de una curva o circunferencia. En la figura 2.56 AD es la cuerda.

Cinemática del movimiento circular uniforme, M.C.U.

Consideremos una partícula que gira en el sentido indicado por la flecha de la figura 2.57, la cual ocupa las posiciones a, b, c, d, e, f, g, hasta volver al punto a. Aquí se dice que la partícula ha descrito en su trayectoria una circunferencia, por lo que podemos definir el movimiento circular así:

Un radian es el ángulo central de una circunferencia al que le corresponde un arco cuya longitud es igual al radio de la misma.

Según esta definición, para medir un ángulo en radianes basta ver las veces que la longitud del arco contiene a la del radio.

$$\alpha = \frac{R}{L} \rightarrow L = \alpha \cdot R$$

La medida de un ángulo, expresado en radianes, queda definida por el cociente entre la longitud del arco de la circunferencia y el radio correspondiente R.

Elementos del movimiento circular uniforme

Un movimiento periódico es el que se repite con similares características a intervalos de tiempos iguales.

Son ejemplos de movimientos periódicos los siguientes:

- El movimiento de la Tierra alrededor del Sol.
- El movimiento de los electrones alrededor del núcleo.
- El movimiento de las manecillas de un reloj.

Los conceptos de periodo y frecuencia que estudiaremos, son aplicables a todos estos movimientos.

El periodo, es el tiempo que tarda la partícula en dar una vuelta completa.

Lo designaremos con T: $T = \frac{t}{n}$ donde "n" es el número de vueltas y "t" el tiempo.

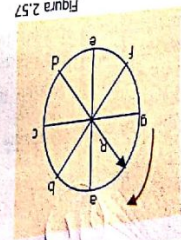


Figura 2.57

Movimiento circular, es el que tiene por trayectoria una circunferencia.

Movimiento circular uniforme, es aquel en el cual la partícula en su trayectoria recorre arcos iguales en intervalos de tiempos iguales.

En la figura 2.57 se observa que: las longitudes de los arcos ab, bc, cd, de, ef, fg y ga son iguales y cada uno de ellos es recorrido en el mismo intervalo de tiempo.

Los ángulos suelen medirse en radianes. Pero veamos qué es un radian. Para ello consideremos la figura 2.58, donde se muestra una circunferencia de centro "O", radio R y arco ab.

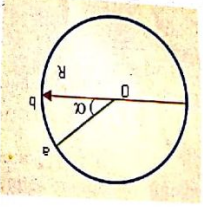


Figura 2.58

Si la longitud del arco ab es igual a la longitud del radio R, tendremos que el ángulo central α es un radian. De acuerdo a esto se define:

El periodo, en cuanto a sus unidades, se expresa en minutos, segundos y horas. Veamos algunos ejemplos:

- El periodo de rotación de la aguja que marca las horas en un reloj es de 12 horas, porque ese es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa.
- El periodo de rotación de la Tierra es 24 horas, porque éste es el tiempo que tarda en dar una vuelta completa.
- El periodo de la Luna es 27 días y 8 horas = 656 horas = 39,360 minutos.

El movimiento circular uniforme es también un movimiento periódico, por lo que el periodo también puede definirse así:

Periodo es el intervalo de tiempo constante que ha de transcurrir en un movimiento periódico para que el movimiento se repita.

La frecuencia, es el número de vueltas que da el móvil en la unidad de tiempo.

Se designa con la letra f y de acuerdo a la definición dada puede escribirse que:

La frecuencia se expresa en s^{-1}

Las ecuaciones del periodo y de la frecuencia, definidas antes son:

$$T = \frac{t}{n} \quad y \quad f = \frac{n}{t}$$

Si multiplicamos miembro a miembro ambas ecuaciones, tenemos:

$$T \cdot f = \frac{t}{t} \cdot \frac{n}{n} \quad T \cdot f = 1$$

de donde: $T = \frac{1}{f}$ o $f = \frac{1}{T}$

Velocidad angular

Como el radio vector R barre ángulos iguales en intervalos de tiempos iguales, podemos definir la velocidad angular así:

La velocidad angular es la magnitud medida por el cociente entre el ángulo descrito por el radio vector y el tiempo empleado en describirlo. Fig. 2.59.

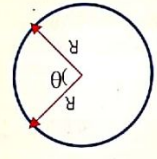


Figura 2.59

Por definición se tiene que $\omega = \frac{\theta}{t}$

Cuando el ángulo barrido es un ángulo de giro igual a 2π , el tiempo empleado es un periodo, pudiéndose escribir que:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Unidad II

Velocidad lineal

Consideremos una partícula que describe un movimiento circular como la mostrada en la figura 2.60.

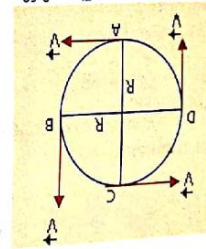


Figura 2.60

Nótese que aparece un vector que llamaremos velocidad tangencial o velocidad lineal que es tangente a la trayectoria en cada punto. La magnitud de este vector se obtiene calculando el arco recorrido en la unidad de tiempo.

Cuando la partícula da una vuelta completa recorre un arco igual a la longitud de la circunferencia, empleando un tiempo igual a un período. De acuerdo a esto, puede escribirse:

$$v = \frac{\text{long arco}}{T} ; v = \frac{2\pi R}{T}$$

Nótese que hemos sustituido la longitud del arco por la fórmula de la longitud de una circunferencia $L = 2\pi R$.

Representación gráfica de la velocidad angular

La velocidad angular, al igual que la velocidad lineal, es una magnitud vectorial, la cual se representa mediante un vector que es perpendicular al plano de la circunferencia que describe la partícula. Su sentido es el mismo de avance de un sentido, cuando gira en el mismo sentido que tiene el móvil o la partícula. Observa la figura 2.61

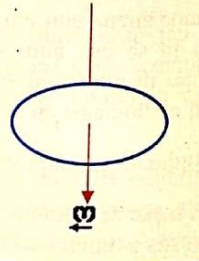


Figura 2.61

Ecuación de la velocidad angular

La ecuación de la velocidad angular es:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \text{ como } T = \frac{1}{f}$$

$$\text{Se tendrá luego que: } \omega = \frac{1}{2\pi}$$

$$\omega = 2\pi f$$

Ecuación de la velocidad lineal en función de la frecuencia

La ecuación de la velocidad lineal es:

$$v = \frac{2\pi R}{T} \text{ Pero } T = \frac{1}{f}$$

$$\text{Luego: } v = \frac{1}{f} \cdot 2\pi R$$

$$v = 2\pi R f$$

Relación entre la velocidad lineal y la velocidad angular

Las ecuaciones de la velocidad lineal y la velocidad angular vienen dadas por:

$$(1) v = 2\pi R f$$

$$(2) \omega = 2\pi f$$

Si dividimos miembro a miembro la ecuación (1) entre la ecuación (2) nos queda:

$$\frac{v}{\omega} = \frac{2\pi R f}{2\pi f}$$

$$\frac{v}{\omega} = R$$

$$v = \omega \cdot R$$

Aceleración centrípeta

Cuando se estudió la aceleración en el movimiento rectilíneo se dijo que ella no era más que el cambio constante que experimentaba la velocidad por unidad de tiempo. La velocidad cambiaba únicamente en valor numérico, no así en dirección.

Cuando el móvil o la partícula, (figura 2.62), realiza un movimiento circular uniforme es lógico pensar que, en cada punto, el valor numérico de la velocidad es el mismo, en cambio es fácil darse cuenta que la dirección de la velocidad va cambiando a cada instante. La variación de dirección del vector velocidad lineal origina una aceleración que llamaremos aceleración centrípeta.

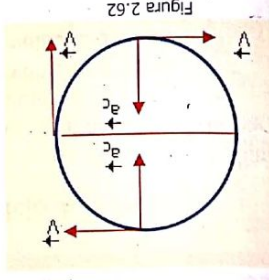


Figura 2.62

La aceleración centrípeta es la aceleración dirigida hacia el centro de la circunferencia que aparece en el movimiento circular uniforme como consecuencia de la variación de dirección del vector velocidad lineal.

Esta aceleración tiene la dirección del radio, apuntando siempre hacia el centro de la circunferencia, razón por la cual también se llama aceleración radial, y se muestra en la figura 2.62. Las direcciones de la velocidad tangencial o lineal y de la aceleración centrípeta, son perpendiculares entre sí.

Ecuación de la aceleración centrípeta

En la figura 2.63 se muestra una partícula que realiza un movimiento circular uniforme.

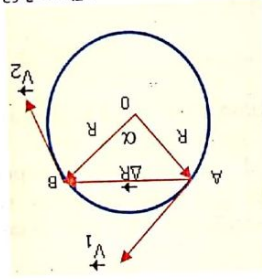


Figura 2.63

En el punto A de su trayectoria tiene una velocidad v_1 y en un intervalo de tiempo Δt ocupa el punto B con velocidad v_2 . Aquí las dos velocidades difieren únicamente en dirección, pues sus magnitudes son iguales.

$$v = \frac{\Delta R}{\Delta t} \text{ cuando } \Delta t \rightarrow 0 \dots \dots \dots (1)$$

Por otra parte, sabemos que la velocidad instantánea y la aceleración vienen dadas respectivamente por: